Algebra de Boole

Introducción a los Sistemas Lógicos y Digitales

2018

Algebra de Boole

Los sistemas digitales emplean generalmente señales que pueden adoptar dos estados bien diferenciados donde (en teoría) pueden ser referenciados a dos niveles de alguna condición física tal como corriente ó tensión (circuitos integrados), campo eléctrico (memorias EEPROM, FLASH), campo magnético (diskettes, cintas magnéticas), condición óptica (CD, DVD), etc..
Consecuentemente es posible representar datos binarios e interrelacionarlos a través de algún grupo de reglas.

El ALGEBRA DE BOOLE es un formalismo que conlleva a la creación de FUNCIONES LÓGICAS donde las mismas relacionan una variable binaria de salida con una o mas de entrada.
Dichas funciones se basan en una serie de postulados y teoremas que imponen las reglas de juego entre dichas variables.

Algebra de Boole

Operadores Lógicos:

Así como los operadores matemáticos (+, -, x,/, etc.) los operadores lógicos son los que interrelacionan a las variables lógicas de entrada entre sí.

Estos son:

AND cuyo símbolo es "•" ó "$\wedge$" ó "&"
OR cuyo símbolo es "+" ó "$\vee$" ó "#"
NOT cuyo símbolo es "‾" ó "/" ó "!"

EJEMPLOS:

$A \bullet B = A \wedge B = A \,\&\, B = A\ B$ (sólo hay una separación entre variables)

$C + D = C \vee D = C \# D$

$\overline{A} = /A = !A$

Con combinaciones entre estos 3 operadores se pueden implementar cualquier función lógica posible.

Algebra de Boole

CONECTIVIDADES:
Dada una serie de variables lógicas (que generalmente se designan con letras), existe un número finito de funciones diferentes (conectividades) que pueden obtenerse.
La cantidad de CONECTIVIDADES se puede calcular mediante la expresión:

$$2^{2^{n}}$$

donde "n" es el número de variables lógicas de entrada a la función

EJEMPLOS:
Si hay una sola variable ➔ El nº de conectividades es 4.
Si hay una dos variables ➔ El nº de conectividades es 16.
Si hay una tres variables ➔ El nº de conectividades es 48.
etc…….

Algebra de Boole

CONECTIVIDADES DE UNA SOLA VARIABLE

Son 4:

F=0 (ó Falso), F=1 (ó Verdadero),

F=A, $F=\overline{A}$ ó NOT A (negación de A: Si A=0 $\rightarrow$F=1 y viceversa).

CONECTIVIDADES DE DOS VARIABLES

Son 16, de las cuales las mas relevantes son:

$F = A$	$F = A \bullet B$ ó A AND B
$F = \overline{A}$	$F = A + B$ ó A OR B
$F = B$	$F = \overline{A \bullet B}$ ó A NAND B
$F = \overline{B}$	$F = \overline{A + B}$ ó A NOR B
$F = 0$	$F = A \oplus B$ ó A OR-Exclusiva B
$F = 1$	$F = \overline{A \oplus B}$ ó A NOR-Exclusiva B

Algebra de Bolee

Métodos de representación de funciones lógicas

- Ecuaciones Lógicas ó booleanas.
- Tabla de verdad.
- Operadores lógicos gráficos (compuertas).
- Diagramas de Karnaugh (método gráfico).
- Diagramas de Venn (método gráfico).
- Representación temporal.

Algebra de Boole

Tablas de verdad de funciones de 1, 2 y 3 variables:

F	A
	0
	1

F	A	B
	0	0
	0	1
	1	0
	1	1

F	A	B	C
	0	0	0
	0	0	1
	0	1	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	0	1
	1	1	0
	1	1	1

Si una función tiene "n" variables de entrada existirán 2^n combinaciones diferentes entre las mismas.

n=1 → 2
n=2 → 4
n=3 → 8
n=4 → 16
etc……

Algebra de Boole

Tablas de verdad de funciones de 1, 2 y 3 variables:

EJEMPLOS:

A

F	A
0	0
1	1

$\bar{A}$

F	A
1	0
0	1

A AND B

F	A	B
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

A NAND B

F	A	B
1	0	0
1	0	1
1	1	0
0	1	1

Algebra de Boole

Tablas de verdad de funciones de 1, 2 y 3 variables:

EJEMPLOS:

A OR B

F	A	B
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

A NOR B

F	A	B
1	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1

A $\oplus$ B

F	A	B
0	0	0
1	0	1
1	1	0
0	1	1

A NOT EXCL. B

F	A	B
1	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

Algebra de Boole

Tablas de verdad de funciones de 1, 2 y 3 variables:

EJEMPLOS:

AND

F	A	B	C
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

OR

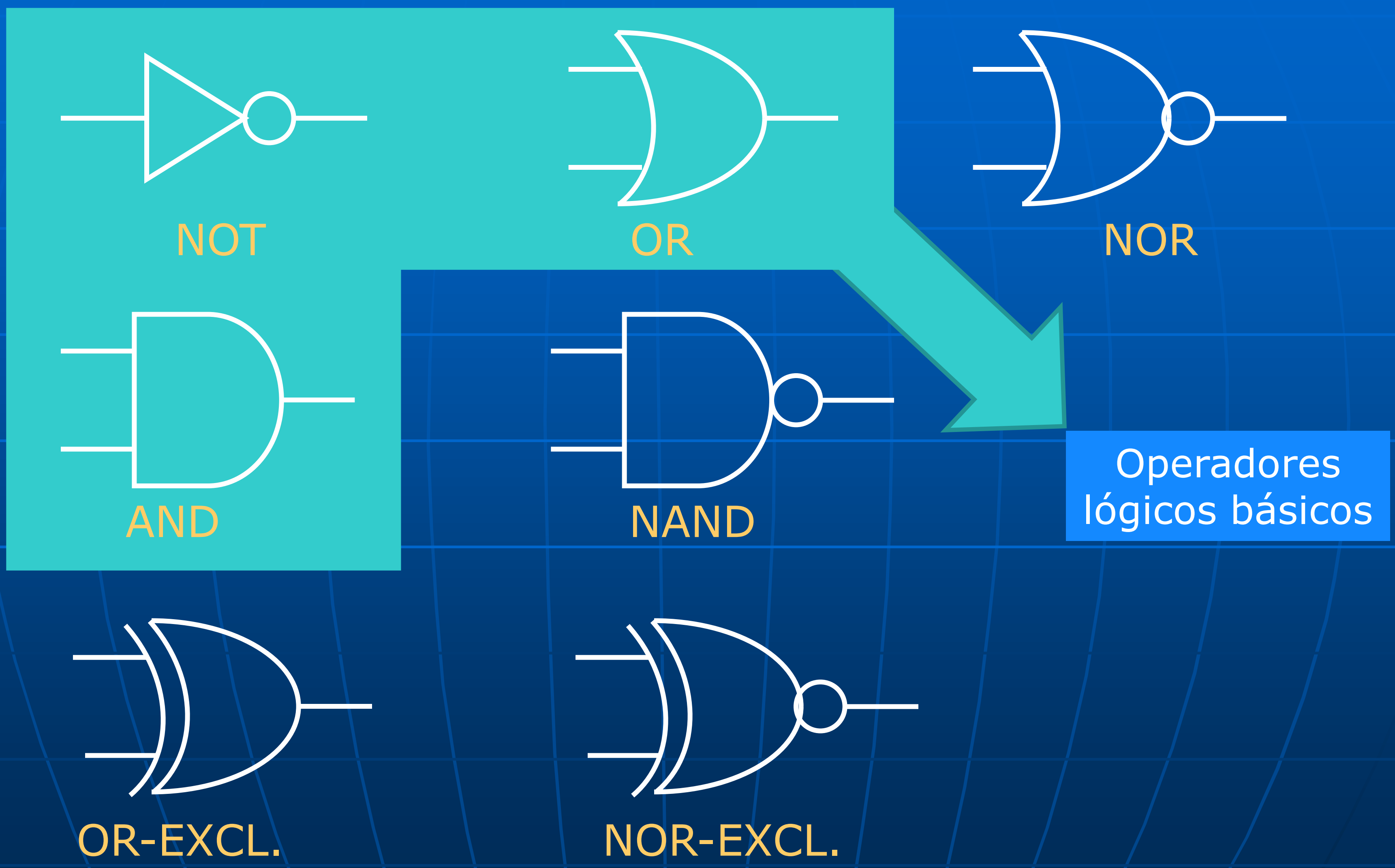
F	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

OR-EXCL.

F	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	1	1	1

Algebra de Boole

Operadores lógicos gráficos (compuertas)



Algebra de Boole

ECUACIONES LÓGICAS

PROPIEDADES:

A + 1 = 1;   A • 1 = A;   A + 0 = A;   A • 0 = 0;

A • A = A;   A + A = A; A • /A = 0; A + /A = 1

[Negar un nº par de veces a A] = A

[Negar un nº impar de veces a A] = /A

A + A • B = A; A • (A + B) = A;

DISTRIBUTIVA → A • (B + C) = A • B + A • C

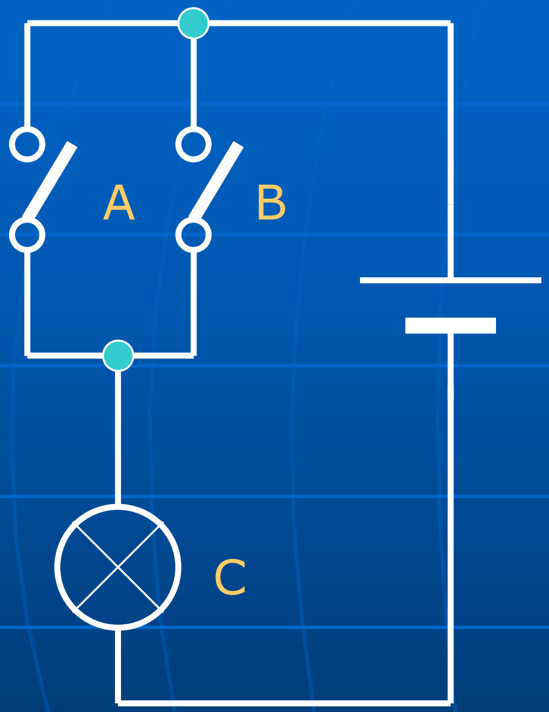
A + B • C = (A + B) • (A + C)

CONMUTATIVA → A • B = B • A;   C + H = H + C

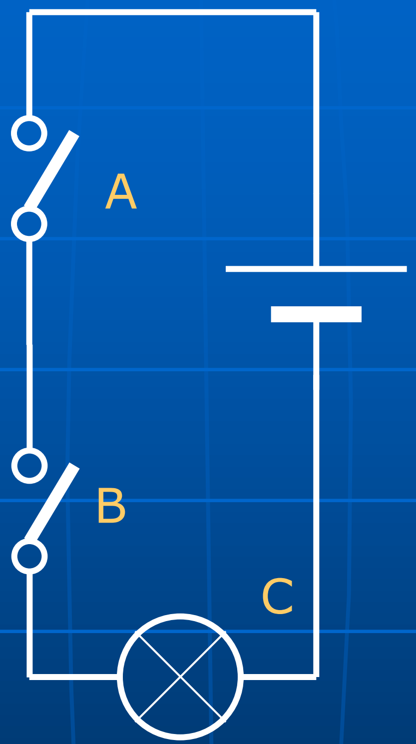
Teorema de De Morgan

$$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B} \qquad \overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$$

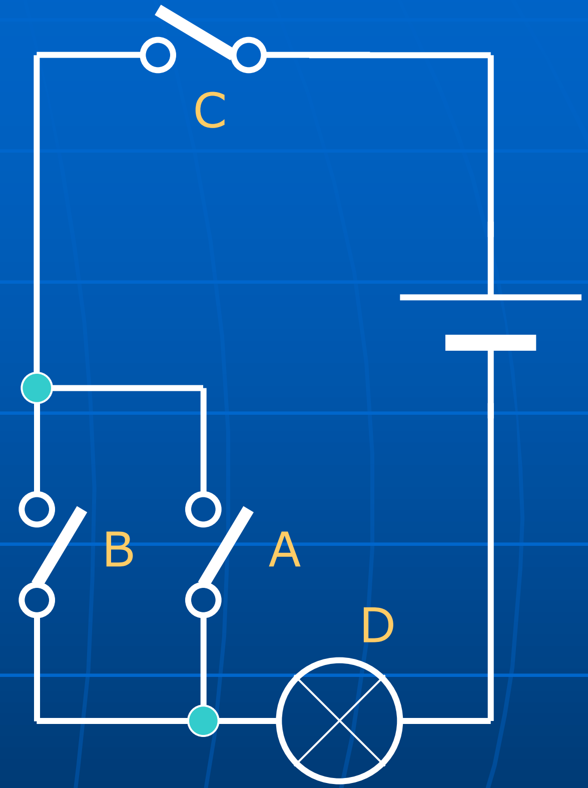
Implementación de funciones lógicas: EJEMPLOS



$$C = A + B$$



$$C = A \bullet B$$

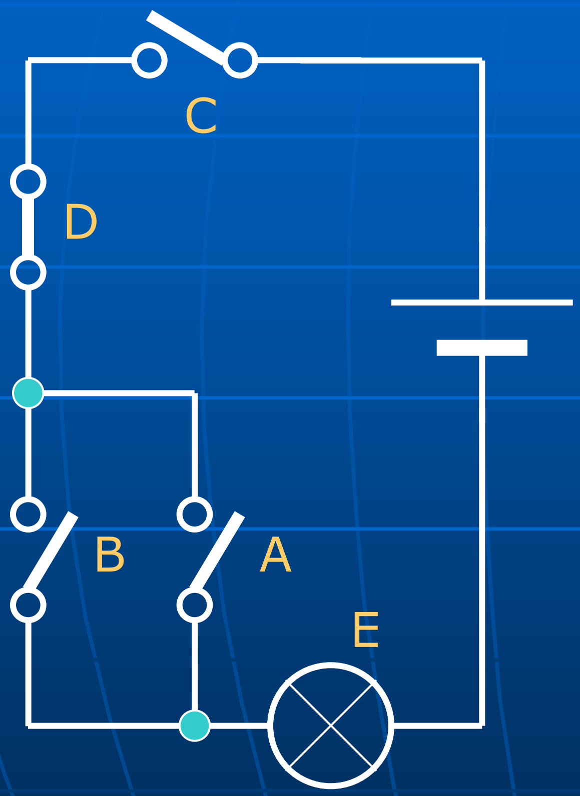


$$D = (A + B) \bullet C$$

NOTA: Aquí se asume que el estado lógico de una llave normal abierta (NA) es "0" si está abierta. La lámpara es "0" si está apagada.

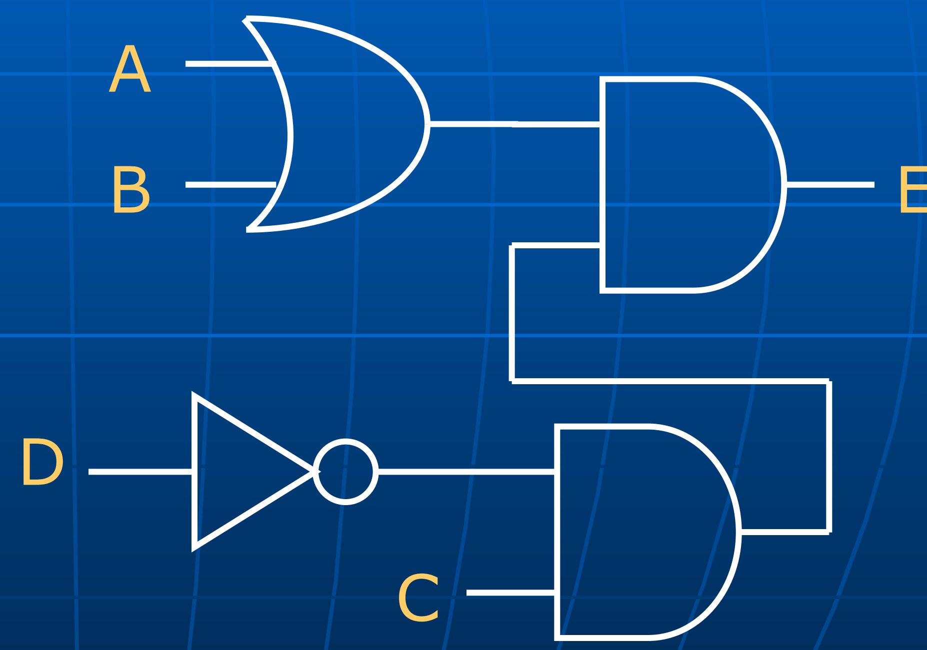
Implementación de funciones lógicas: EJEMPLOS

Del 3er. ejemplo anterior, si hay además una llave normal cerrada (NC), tendríamos:



$E = (A + B) \bullet C \bullet /D$

CIRCUITO EQUIVALENTE



Algebra de Boole

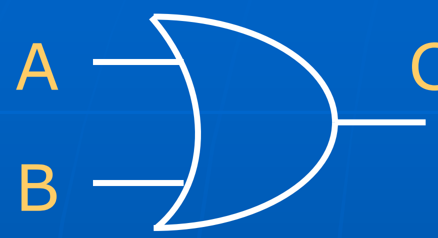
Implementación de funciones lógicas:

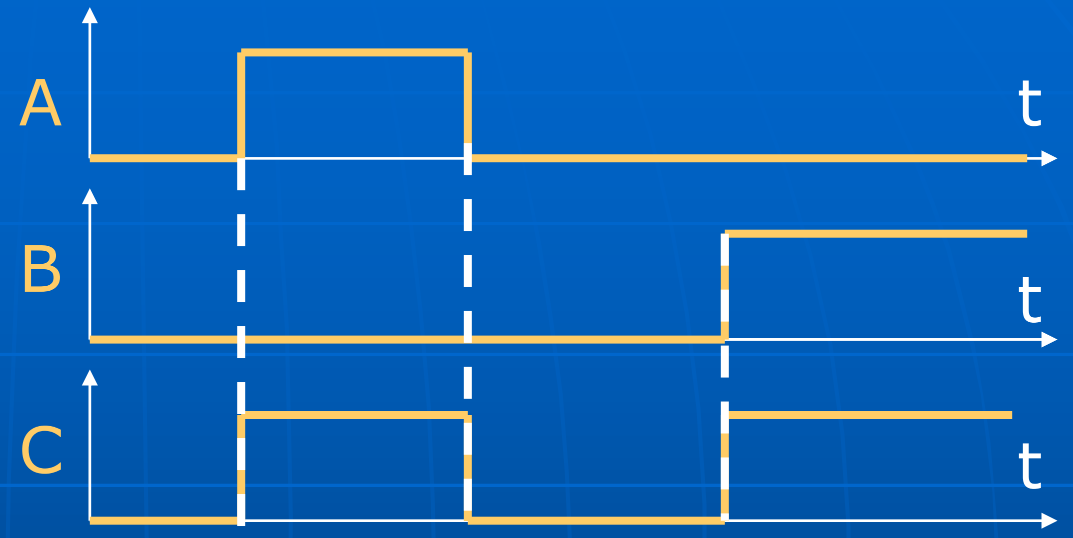
		Todo NAND		Todo NOR
$A + B$	$\rightarrow$	$\overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}$	ó	$\overline{\overline{A + B}}$
$\overline{A + B}$	$\rightarrow$	$\overline{\overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}}$	ó	$\overline{A + B}$
$A \bullet B$	$\rightarrow$	$\overline{\overline{A \bullet B}}$	ó	$\overline{\overline{A} + \overline{B}}$
$\overline{A \bullet B}$	$\rightarrow$	$\overline{A \bullet B}$	ó	$\overline{\overline{\overline{A} + \overline{B}}}$
$\overline{A}$	$\rightarrow$	$\overline{A \bullet 1}$	ó	$\overline{A + 0}$

Algebra de Boole

REPRESENTACIÓN TEMPORAL

COMPUERTA OR





COMPUERTA IDEAL

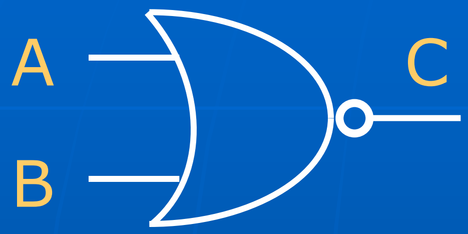
No existen retardos ...!!!

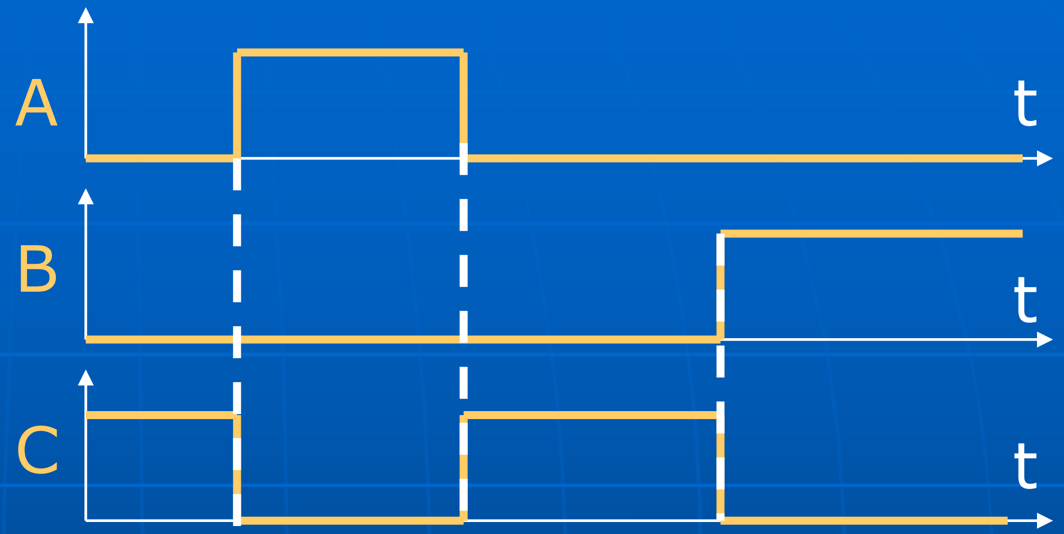
COMPUERTA AND

COMPUERTA IDEAL

REPRESENTACIÓN TEMPORAL

COMPUERTA NOR

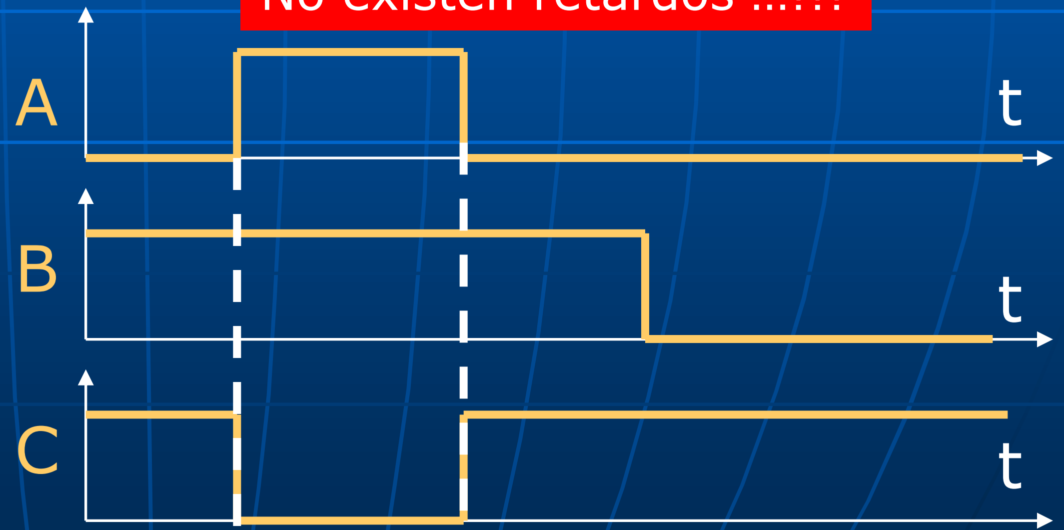




COMPUERTA IDEAL

No existen retardos ...!!!

COMPUERTA NAND



COMPUERTA IDEAL

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

FUNCIONES CANÓNICAS:
Son aquellas formadas por términos especiales que contienen a todas las variables de entrada de la función. Dependiendo de que términos una función canónica puede ser de dos tipos: PRIMERA FORMA ó SEGUNDA FORMA.

PRIMERA FORMA:
Está formada por mintérminos (intersección entre las variables en juego).

SEGUNDA FORMA:
Está formada por maxitérminos (unión entre las variables en juego).

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

FUNCIÓN CANÓNICA DE PRIMERA Y SEGUNDA FORMA

Para 2 variables A y B, hay 2^2 términos en total.

Los mintérminos son: /A /B, /A B, A /B y A B.

Los maxtérminos son: A+B, A+/B, /A+B y /A+/B.

Para 3 variables, tendremos 2^3 términos en total.

Los mintérminos son: /C /D /E, /C /D E, /C D /E, /C D E, C /D /E,
C /D E, C D /E y C D E.

LA UNIÓN COMPLETA DE MINTÉRMINOS DA LA FUNCIÓN "1"

Los maxtérminos son: C+D+E, C+D+/E, C+/D+E, C+/D+/E,
/C+D+E, /C+D+/E, /C+/D+E y /C+/D+/E

LA INTERSECCIÓN COMPLETA DE MAXTÉRMINOS DA LA FUNCIÓN "0"

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

FUNCIÓN CANÓNICA DE PRIMERA FORMA

EJEMPLOS:

FUNCIÓN CANÓNICA
DE 2 VARIABLES

$$E = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

$$E = \sum (m1, m2) = \sum (1,2)$$

FUNCIÓN CANÓNICA
DE 3 VARIABLES

$$J = \overline{P} \cdot \overline{Q} \cdot R + \overline{P} \cdot Q \cdot \overline{R} + P \cdot Q \cdot R$$

$$J = \sum (m1, m2, m7) = \sum (1,2,7)$$

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

FUNCIÓN CANÓNICA DE SEGUNDA FORMA

EJEMPLOS:

FUNCIÓN CANÓNICA
DE 2 VARIABLES

$$T = (\overline{E} + F) \cdot (E + F) \cdot (\overline{E} + \overline{F})$$

$$T = \prod (M0, M2, M3) = \prod (\bar{0}, \bar{2}, \bar{3})$$

FUNCIÓN CANÓNICA
DE 3 VARIABLES

$$A = (B + \overline{C} + D)$$

$$A = \prod (M2) = \prod (\bar{2})$$

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

CONVERSIÓN A FUNCIÓN CANÓNICA DE PRIMERA FORMA

Convertir la siguiente función: $F = A + B \cdot C$

F = A (/B/C + /BC + B/C + BC) + BC (/A + A)

F = A/B/C + A/BC + AB/C + ABC + ABC + /ABC

F = /ABC + A/B/C + A/BC + AB/C + ABC

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

CONVERSIÓN A FUNCIÓN CANÓNICA DE SEGUNDA FORMA

Convertir la siguiente función: **P = (Q + R) S**

Por un lado:

(Q + R) = (Q + R) + /S S = (Q + R) = (Q + R + /S) (Q + R + S)

Por el otro:

S = S + (/Q + /R) (/Q + R) (Q + /R) (Q + R)

= (/Q + /R + S) (/Q + R + S) (Q + /R + S) (Q + R + S)

Combinando:

P = (/Q + /R + S) (/Q + R + S) (Q + /R + S) (Q + R + S)
(Q + R + /S)

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

CONVERSIÓN DE UNA FUNCIÓN CANÓNICA A LA OTRA

Pasar de 1ra forma a 2da:

EJEMPLO:

G = /B /C /D + /B C D + B /C /D + B C /D + B C D

Se trabaja con el complemento de G:

/G = /B /C D + /B C /D + B /C D (Los mintérminos que faltan en G)

Negando ambos miembros se mantiene la igualdad:

$$G = \overline{/B\ /C\ D + /B\ C\ /D + B\ /C\ D}$$

Aplicando De Morgan dos veces:

$$G = (\ \overline{/B\ /C\ D}\ )\ (\ \overline{/B\ C\ /D}\ )\ (\ \overline{B\ /C\ D}\ )$$

G = (B+C+/D) (B+/C+D) (/B+C+/D)

De tener 5 mintérminos pasamos a tener 3 maxtérminos ….. POQUÉ?

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 2 VARIABLES

		$\overline{B}$	B
	A \ B	0	1
$\overline{A}$	0	$\overline{A}\,\overline{B}$ $_0$	$\overline{A}\,B$ $_1$
A	1	$A\,\overline{B}$ $_2$	$A\,B$ $_3$

Aquí indica que la variable B está en toda la columna sin negar

Este número indica si la variable en la columna está negada o nó.

Este número indica la posición del mintérmino

Este número indica si la variable en la fila está negada o nó.

Aquí indica que la variable A está en toda la fila sin negar

CADA MINTÉRMINO TIENE UN LUGAR ASIGNADO DENTRO DEL DIAGRAMA DE KARNAUGH

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 3 VARIABLES

		$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
	A \ BC	00	01	11	10
$\overline{A}$	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}_0$	$\overline{A}\,\overline{B}C_1$	$\overline{A}BC_3$	$\overline{A}B\overline{C}_2$
A	1	$A\overline{B}\,\overline{C}_4$	$A\overline{B}C_5$	ABC_7	$AB\overline{C}_6$

NO son adyacentes cambian las variables A y C .

Son adyacentes ya que sólo cambia la variable A .

Para armar cualquier Diagrama de Karnaugh los casilleros contiguos verticales u horizontales deben contener mintérminos adyacentes, es decir, donde sólo cambie una variable entre uno y otro.

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

		$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\overline{A}\,\overline{B}$	00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$ 1	$\overline{A}\,\overline{B}CD$ 3	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$ 2
$\overline{A}B$	01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$ 4	$\overline{A}B\overline{C}D$ 5	$\overline{A}BCD$ 7	$\overline{A}BC\overline{D}$ 6
AB	11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$ 12	$AB\overline{C}D$ 13	$ABCD$ 15	$ABC\overline{D}$ 14
$A\overline{B}$	10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 8	$A\overline{B}\,\overline{C}D$ 9	$A\overline{B}CD$ 11	$A\overline{B}C\overline{D}$ 10

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

5 VARIABLES:

La representación se realiza con dos diagramas de Karnaugh de 4 variables cada una, donde la quinta variable se representa en uno negada y en el otro sin negar.

6 VARIABLES:

Idem al caso anterior pero ahora con 4 Karnaugh de 4 variables cada una.
Cada Karnaugh corresponderá a una combinación de la 5ta. y 6ta. variable (son 4 combinaciones diferentes)

LA SÍNTESIS Y SIMPLIFICACIÓN UTILIZANDO KARNAUGH ES UTIL HASTA 5 VARIABLES. mayor número puede dar lugar a errores en la determinación de los términos a simplificar.

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Representación de funciones canónicas

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	1	0	1	1
$\bar{A}B$	01	1	0	1	1
AB	11	0	0	0	0
$A\bar{B}$	10	0	0	0	0

EJEMPLO: $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BCD + ABC\overline{D}$

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Representación de funciones en general

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	1	1	1	1
$\bar{A}B$	01	1	1	1	1
AB	11	0	0	0	0
$A\bar{B}$	10	0	0	0	0

La unión de todos estos mintérminos no dan la función: F = /A

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Representación de funciones en general

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	0	0	0
$\bar{A}B$	01	0	0	0	0
AB	11	1	1	1	1
$A\bar{B}$	10	1	1	1	1

La unión de todos estos mintérminos no dan la función: F = A

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Representación de funciones en general

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	0	0	0
$\bar{A}B$	01	1	1	1	1
AB	11	1	1	1	1
$A\bar{B}$	10	0	0	0	0

La unión de todos estos mintérminos no dan la función:
$F = B$

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Representación de funciones en general

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	0	0	0
$\bar{A}B$	01	1	1	1	1
AB	11	1	1	1	1
$A\bar{B}$	10	1	1	1	1

La unión de los mintérminos de A y de B forman la función: $F = A + B$

Esta operación de “unión” toma los términos comunes y no comunes de las variables A y B.

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Representación de funciones en general

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	0	0	0
$\bar{A}B$	01	0	0	0	0
AB	11	1	1	1	1
$A\bar{B}$	10	0	0	0	0

La intersección de los mintérminos que forman a A y B dan F = A • B

Esta operación de "intersección" toma sólo los términos comunes de las variables A y B.

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Representación de funciones en general

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	0	1	1
$\bar{A}B$	01	0	0	1	1
AB	11	0	0	0	0
$A\bar{B}$	10	0	0	0	0

Esto dá: $F = \bar{A} \bullet C$

Esta operación de "intersección" toman los términos comunes de las variables /A y C.

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES EN GENERAL

Ejemplo: A + B C

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	0	0	0
$\bar{A}B$	01	0	0	1	1
AB	11	1	1	1	1
$A\bar{B}$	10	1	1	1	1

B C

A

Algebra de Boole

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

ESTRUCTURAS PARTICULARES

	AB \ CD	$\bar{C}\bar{D}$ 00	$\bar{C}D$ 01	CD 11	$C\bar{D}$ 10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	1	0	1
$\bar{A}B$	01	1	0	1	0
AB	11	0	1	0	1
$A\bar{B}$	10	1	0	1	0

F = /A /B /C D + /A /B C /D + /A B /C /D + /A B C D
A B /C D + A B C /D + A /B /C /D + A /B C /D =
/A /B (/C D + C /D) + A B (/C D + C /D) +
/A B (/C /D + C D) + A /B (/C /D + C D) =
/A /B (C ⊕ D) + A B (C ⊕ D) + /A B (C Θ D) + A /B (C Θ D) =
(C ⊕ D) [/A /B + A B] + (C Θ D) [/A B + A /B] =
(C ⊕ D) [A Θ B] + (C Θ D) [A ⊕ B] = A ⊕ B ⊕ C ⊕ D

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

Simplificar una función lógica significa hallar otra manera de expresarla pero que utilice la menor cantidad de términos y/o variables a fin de conseguir una representación mas compacta.
Esto en realidad depende de la estructura de hardware que se utilice para la generación de sub-funciones lógicas.

- Método clásico.
- Diagramas de Karnaugh (método gráfico).
- Métodos tabulares (Quine-McCluskey).
- Métodos algorítmicos.
- etc..

Algebra de Boole

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS

MÉTODO CLÁSICO:
Utiliza las reglas generales del Algebra de Boole para ver si es posible reducir la función lógica a su menor expresión.

EJEMPLOS:

$A \bullet (A + B) + B \rightarrow A + B$ utilizando una de las propiedades antes citada.

$\overline{A} \bullet B + A \bullet \overline{B} \rightarrow A \oplus B$ por lo que puede implementarse con una sola compuerta OR-Exclusiva.

Algebra de Boole

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

		$\overline{B}$	B
	A \ B	0	1
$\overline{A}$	0	$\overline{A}\,\overline{B}_0$	$\overline{A}\,B_1$
A	1	$A\,\overline{B}_2$	$A\,B_3$

SI SE TOMAN DOS MINTÉRMINOS ADYACENTES EN EL DIAGRAMA SE ELIMINA UNA VARIABLE

EJEMPLO 3: /A B + A B = B

EJEMPLO 2: /A /B + A /B = /B

		$\overline{B}$	B
	A \ B	0	1
$\overline{A}$	0	$\overline{A}\,\overline{B}_0$	$\overline{A}\,B_1$
A	1	$A\,\overline{B}_2$	$A\,B_3$

Algebra de Boole

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

		$\bar{B}$	B
	A \ B	0	1
$\bar{A}$	0	$\bar{A}\,\bar{B}_{0}$	$\bar{A}\,B_{1}$
A	1	$A\,\bar{B}_{2}$	$A\,B_{3}$

		$\bar{B}$	B
	A \ B	0	1
$\bar{A}$	0	$\bar{A}\,\bar{B}_{0}$	$\bar{A}\,B_{1}$
A	1	$A\,\bar{B}_{2}$	$A\,B_{3}$

SI SE TOMAN DOS MINTÉRMINOS ADYACENTES EN EL DIAGRAMA SE ELIMINA UNA VARIABLE

EJEMPLO 1: /A /B + /A B = /A

EJEMPLO 2: A /B + A B = A

Algebra de Boole

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 3 VARIABLES

SI SE TOMAN DOS MINTÉRMINOS ADYACENTES EN EL DIAGRAMA SE ELIMINA UNA VARIABLE.

		$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
	A \ BC	00	01	11	10
$\overline{A}$	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\ _0$	$\overline{A}\,\overline{B}C\ _1$	$\overline{A}BC\ _3$	$\overline{A}B\overline{C}\ _2$
A	1	$A\overline{B}\,\overline{C}\ _4$	$A\overline{B}C\ _5$	$ABC\ _7$	$AB\overline{C}\ _6$

EJEMPLO 1: /A /B /C + A /B /C = /B /C.

SI SE TOMAN CUATRO,
SE ELIMINAN DOS VARIABLES

EJEMPLO 2: /A /B /C + A /B /C + /A /B C + A /B C = /B

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 3 VARIABLES

	A \ BC	$\bar{B}\bar{C}$ 00	$\bar{B}C$ 01	BC 11	$B\bar{C}$ 10
$\bar{A}$	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}_0$	$\bar{A}\bar{B}C_1$	$\bar{A}BC_3$	$\bar{A}B\bar{C}_2$
A	1	$A\bar{B}\bar{C}_4$	$A\bar{B}C_5$	ABC_7	$AB\bar{C}_6$

La función vale /C tomando los 4 mintérminos

La función vale A

Cómo se obtiene "BC" ? y "A" ?

Algebra de Boole

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

		$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\overline{A}\,\overline{B}$	00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$ 1	$\overline{A}\,\overline{B}CD$ 3	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$ 2
$\overline{A}B$	01	ABCD 4	ABCD 5	ABCD 7	ABCD 6
AB	11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$ 12	$AB\overline{C}D$ 13	ABCD 15	$ABC\overline{D}$ 14
$A\overline{B}$	10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 8	$A\overline{B}\,\overline{C}D$ 9	$A\overline{B}CD$ 11	$A\overline{B}C\overline{D}$ 10

“B”

La función vale /B tomando los 8 mintérminos

Tomando estos 8 se tiene “/C”

Tomando estos 8 se tiene “C”

Algebra de Boole

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

		$\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\overline{A}\,\overline{B}$	00	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D$ 1	$\overline{A}\,\overline{B}CD$ 3	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$ 2
$\overline{A}B$	01	$\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}$ 4	$\overline{A}B\overline{C}D$ 5	$\overline{A}BCD$ 7	$\overline{A}BC\overline{D}$ 6
AB	11	$AB\overline{C}\,\overline{D}$ 12	$AB\overline{C}D$ 13	$ABCD$ 15	$ABC\overline{D}$ 14
$A\overline{B}$	10	$A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$ 8	$A\overline{B}\,\overline{C}D$ 9	$A\overline{B}CD$ 11	$A\overline{B}C\overline{D}$ 10

Tomando estos 8 se tiene "/A"

Tomando estos 8 se tiene "A"

Tomando estos 8 se tiene "D"

Cómo se obtiene "/D" ?

Algebra de Boole

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

PRIMERA FORMA: 4 VARIABLES

Ejemplo: Simplificar la función A /C + A /B + /A B C + A C

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	0	0	0
$\bar{A}B$	01	0	0	1	1
AB	11	1	1	1	1
$A\bar{B}$	10	1	1	1	1

B C

A

RESULTADO: A + B C

SIMPLIFICACIÓN DE FUNCIONES

DIAGRAMAS DE KARNAUGH

ESTRUCTURAS CON “DON´T CARE”

Son funciones que son incompletamente definidas (hay combinaciones de variables que no se utilizan en la función).

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
	AB \ CD	00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	X	0	X	0
$\bar{A}B$	01	1	0	0	0
AB	11	X	0	1	X
$A\bar{B}$	10	X	0	X	X

ESTA “X” LA DEJO EN “0”. LAS DEMÁS EN “1”

$$F = /C\ /D + A\ C$$

RIESGOS DE TEMPORIZACIÓN (TIMING HAZARDS)

Posibles comportamientos que pueden experimentar las salidas de un circuito digital si es excitado con alguna combinación de señales a su entrada que den como resultado una respuesta transitoria diferente a la prevista en el diseño debido a la existencia de retardos que existen en todo dispositivo físico. Este comportamiento depende además de la estructura del circuito (como se lo implementa en forma lógica).

Riesgo estático: Es aquél que puede hacer que una salida vaya a temporalmente a un estado diferente al definitivo.

Riesgo estático de "1": Cuando el circuito responde momentáneamente a una dada excitación con un "0".

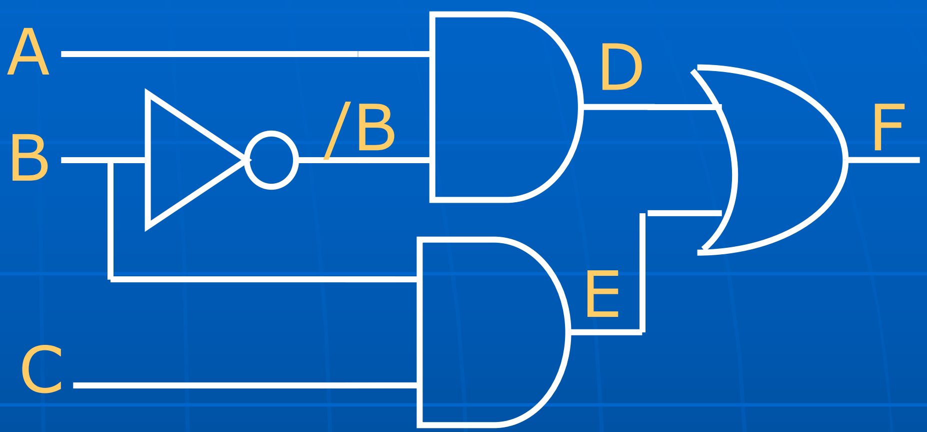
Riesgo estático de "0": Idem pero donde se establece temporariamente un "1" a la salida.

Riesgo dinámico: Respuesta de una salida la cual cambia de estado repetidas veces al generarse un simple cambio a su entrada.

Algebra de Boole

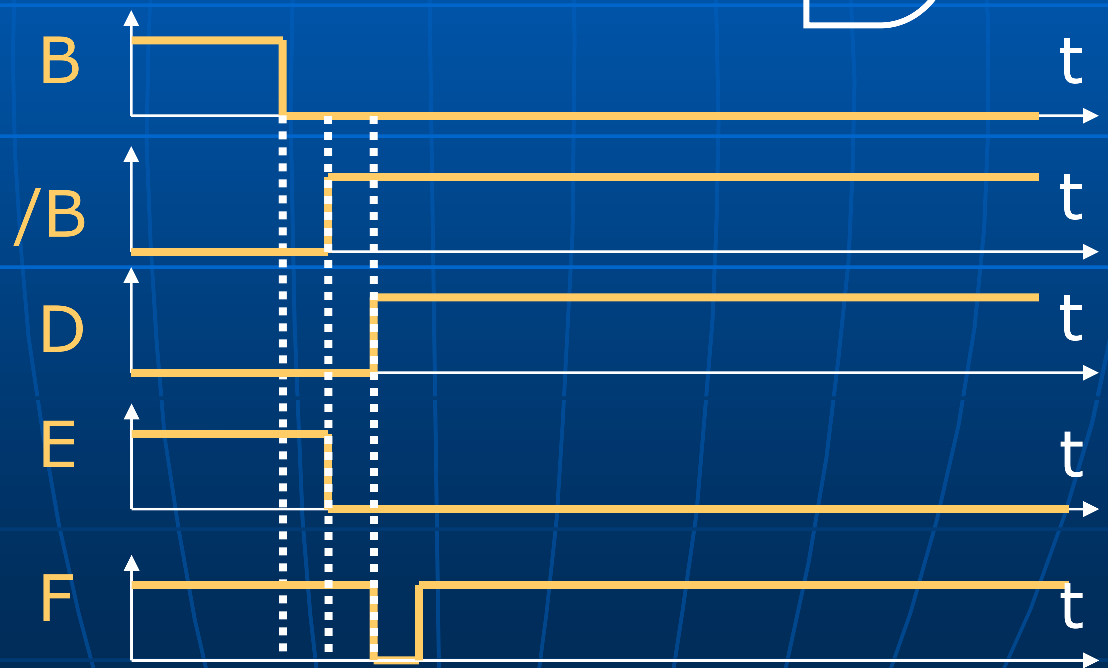
RIESGOS DE TEMPORIZACIÓN

Riesgo estático de "1": Una salida que debe tener un estado lógico final "1" puede momentáneamente ponerse a "0" si se dá que hay al menos dos fuentes concurrentes que habilitan un "1" y una de ellas difiere temporalmente en su respuesta respecto de la otra.



EJEMPLO

A=C="1"



Algebra de Boole

RIESGOS DE TEMPORIZACIÓN

		$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
	A \ BC	00	01	11	10
$\overline{A}$	0	0	1	1 3	2
A	1	1 4	1 5	1 7	6

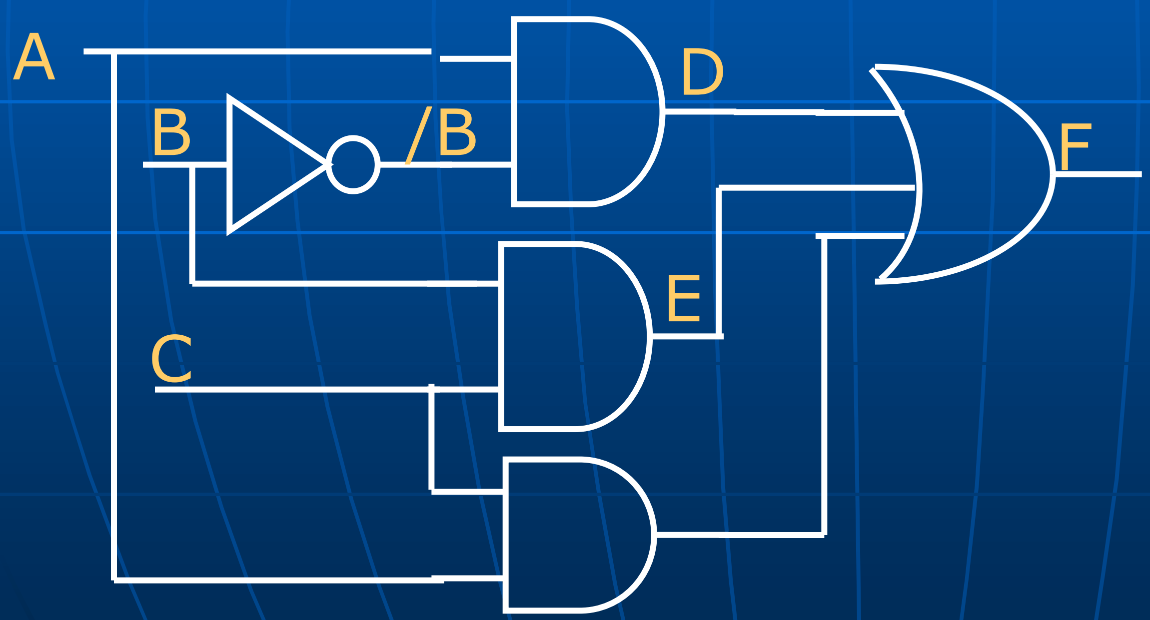
En el Karnaugh de la salida se puede apreciar como los términos marcados con “rojo” (A • /B) y “amarillo” (B • C) si en algún momento son ambos “0” la salida también lo será.

Algebra de Boole

RIESGOS DE TEMPORIZACIÓN

Solución:

	$\overline{B}\,\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
A \ BC	00	01	11	10
$\overline{A}$ 0	0	1	1 3	2
A 1	1 4	1 5	1 7	6

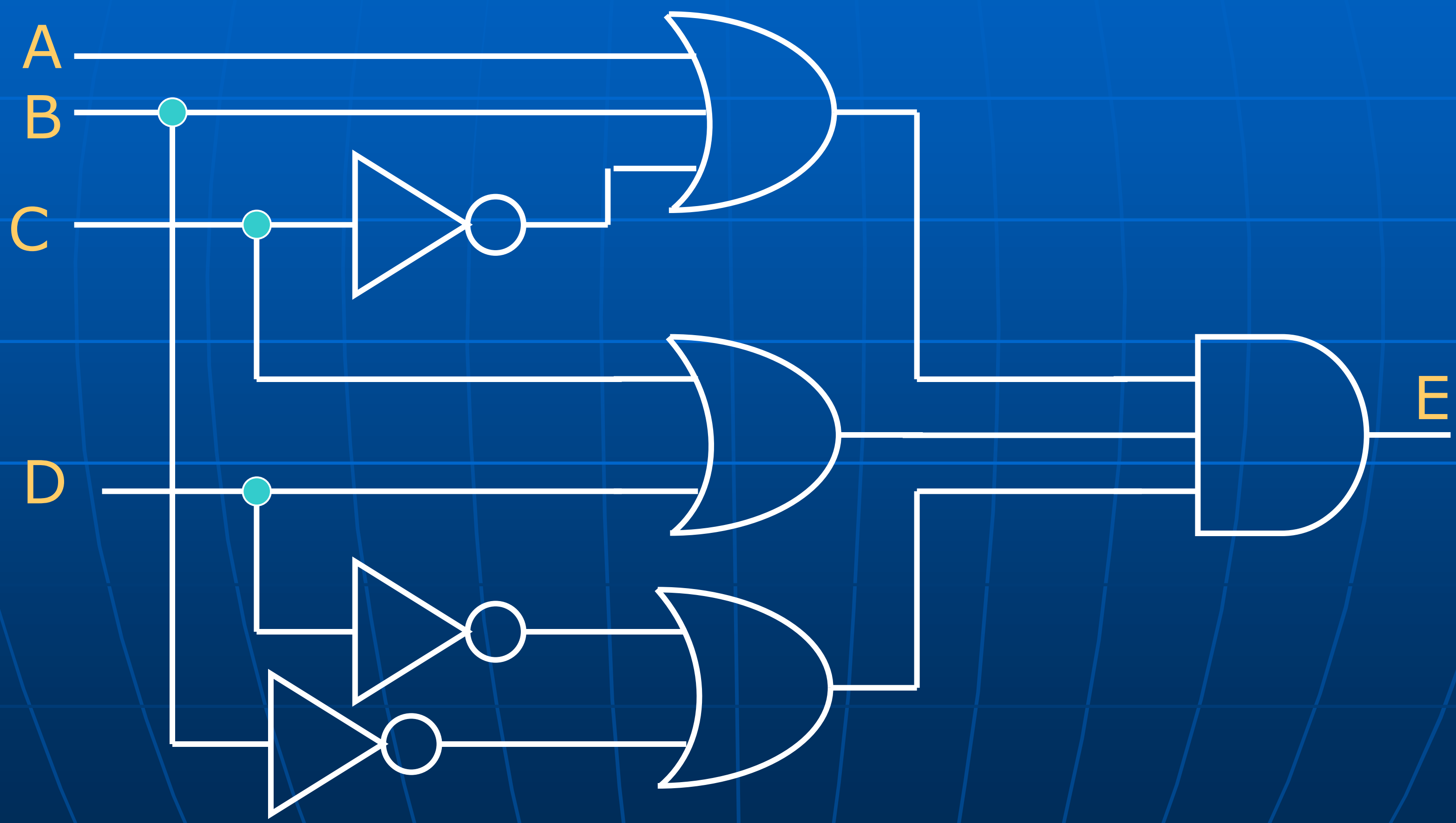


Con esta estructura aunque redundante se evita que ocurra el riesgo de "1" ya que la compuerta adicional evita que el retardo del negador pueda dar una falsa respuesta.

Algebra de Boole

RIESGOS DE TEMPORIZACIÓN

Riesgo estático de “0”: Una salida que debe tener un estado lógico final “0” puede momentáneamente ponerse a “1” si se dá que hay al menos dos fuentes concurrentes que habilitan un “0” y una de ellas difiere temporalmente en su respuesta respecto de la otra.



Bibliografía:

Apuntes de teoría:

- "Diagramas de karnaugh". S. Noriega.

Libros:

- "Sistemas Digitales". R. Tocci, N. Widmer, G. Moss. Ed. Prentice Hall.
- "Diseño Digital". M. Morris Mano. Ed. Prentice Hall. 3ra edición.
- "Diseño de Sistemas Digitales". John Vyemura. Ed. Thomson.
- "Diseño Lógico". Antonio Ruiz, Alberto Espinosa. Ed. McGraw-Hill.
- "Digital Design:Principles & Practices". John Wakerly. Ed. Prentice Hall.
- "Diseño Digital". Alan Marcovitz. Ed. McGraw-Hill.
- "Electrónica Digital". James Bignell, R. Donovan. Ed. CECSA.
- "Técnicas Digitales con Circuitos Integrados". M. Ginzburg.
- "Fundamentos de Diseño Lógico y Computadoras". M. Mano, C. Kime. Ed. Prentice Hall.
- "Teoría de conmutación y Diseño lógico". F. Hill, G. Peterson. Ed. Limusa